

Cours de mathématiques P.S.I.*

D'après les cours de M. Guillaumie

Henriet Quentin

Dualité

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Hyperplan

Définition :

Soit H un sous-espace vectoriel de E . On dit que H est un hyperplan de E dès lors que H admet un supplémentaire de dimension 1 (droite vectorielle).

Proposition :

Soit H un hyperplan de E . Si $e \notin H$, alors $E = H \oplus \text{Vect}(e)$.

2. Formes linéaires d'un espace vectoriel

Définition :

On appelle forme linéaire de E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des formes linéaires de E est appelé espace dual de E , noté $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Propriété :

E^* est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et si E est de dimension n , E^* est de dimension n .

Exemples :

- La trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $L_1(I)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $f \in L_1(I) \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire de $L_1(I)$.
- Soit $a \in \mathbb{K}$. $\varphi : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(a)$ est une forme linéaire de $\mathbb{K}[X]$.
- Soit E tel que $\dim(E) = n$, on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$.

$$\varphi \in E^* \Leftrightarrow \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \forall x \in E \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \text{ on a } \varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Proposition :

Soit $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$. Alors $\text{rg}(\varphi) = 1$.

Preuve :

$\varphi \in E^*$, donc $\text{rg}(\varphi) \leq 1$. Or $\text{rg}(\varphi) \neq 0$, sinon φ serait nulle. Donc $\text{rg}(\varphi) = 1$.

Corollaire :

Soit $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$. φ est surjective, en particulier $\exists e \in E$ tel que $\varphi(e) = 1$.

Théorème :

Soit $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$. Alors $\text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E .

Exemple :

$\text{Ker}(\text{tr}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tel que } \text{tr}(A) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème :

Soit H un hyperplan de E . $\exists \varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$, tel que $H = \text{Ker}(\varphi)$.
Si il existe une autre forme linéaire μ de E telle que $H = \text{Ker}(\mu)$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $\mu = \alpha \varphi$.

Preuve :

$\exists e \in E \setminus \{0\}$ tel que $e \in E = H \oplus \text{Vect}(e)$. Soit $x \in E$, $\exists! (h_x, \lambda_x) \in H \times \mathbb{K}$ tel que $x = h_x + \lambda_x e$.

Pour tout $x \in E$, ce λ_x est unique. Soit alors $\varphi : x \mapsto \lambda_x$, application de E dans $\mathbb{K}$.

Soit $(x, y) \in E^2$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. On a $x = h_x + \lambda_x e$, $y = h_y + \lambda_y e$, (h_x, λ_x) et $(h_y, \lambda_y) \in H \times \mathbb{K}$.

Par combinaison linéaire, $\alpha x + \beta y = (\alpha h_x + \beta h_y) + (\alpha \lambda_x + \beta \lambda_y) e$. Par unicité de la décomposition d'un vecteur

sur $E = H \oplus \text{Vect}(e)$, on a $\lambda_{\alpha x + \beta y} = \alpha \lambda_x + \beta \lambda_y$, c'est-à-dire $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$. Donc $\varphi \in E^*$,

et φ n'est pas nulle : $\varphi(e) = 1$. Soit $x \in E$, $x \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda_x = 0 \Leftrightarrow x = h_x \in H : H = \text{Ker}(\varphi)$.

Soit alors $\mu \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $H = \text{Ker}(\mu)$. Soit $x \in E : \exists (h_x, \lambda_x) \in H \times \mathbb{K}$ tel que $x = h_x + \lambda_x e$.

Alors $\mu(x) = \mu(h_x) + \varphi(x)\mu(e)$, or $\mu(h_x) = 0$, on a donc $\mu = \mu(e)\varphi$, et $\mu(e) \neq 0$, sinon μ serait nul.

Définition :

Soient $\varphi \in E^*$, et H un hyperplan de E tel que $H = \text{Ker}(\varphi)$. L'équation $\varphi(x) = 0$ est appelée équation de H .

Propriété :

En dimension finie, si E est de dimension n , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{Ker}(\varphi) = H \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

Définition :

L'équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ est appelée équation de l'hyperplan H dans la base $\mathcal{B}$. Elle est unique à un coefficient multiplicatif non nul près.

3. Bases duales

Dans ce paragraphe, E est de dimension finie n .

Proposition :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $x \in E$. $\exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$. On note $e_j^* : x \mapsto x_j$.
 e_j^* est une forme linéaire de E appelée $j^{\text{ème}}$ forme linéaire coordonnée de E , associée à $\mathcal{B}$.

Propriété :

$$\forall x \in E, x = \sum_{j=1}^n e_j^*(x) e_j.$$

Proposition :

$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$: cette formule est appelée formule de Kronecker.

Théorème :

La famille ainsi construite est une base de E^* .

Définition :

Cette famille est appelée base duale de la base $\mathcal{B}$, elle est notée $\mathcal{B}^*$.

Preuve du théorème :

On sait que $\dim(E^*) = \dim(E) = n$, et $\text{Card}(\mathcal{B}^*) = n$. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = 0$.

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*(e_j) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{i,j} = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0$: La famille construite est libre de cardinal n ,

il s'agit donc d'une base de E^* .

Remarque :

Pour trouver la base duale $\mathcal{B}^*$ d'une base $\mathcal{B}$ de E , il suffit de déterminer les coordonnées d'un vecteur quelconque de E dans la base $\mathcal{B}$. On a alors $x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i$.

Proposition :

Les formules de Kronecker caractérisent la base duale :

Si $\exists (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in (E^*)^n$ tel que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$, alors $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est la base duale de la base $\mathcal{B}$.

Preuve :

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in (E^*)^n$ tel que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Soit $x \in E$, on sait que $x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i$.

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi_j(x) = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) \varphi_j(e_i) = e_j^*(x)$.

Exemple :

$E = \mathbb{K}_n[X]$. Soient $a \in \mathbb{K}$, $P_k(X) = (X-a)^k$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. (P_k) est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}_n[X]$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

D'après la formule de Taylor pour les polynômes, $P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} P_k(X)$.

On pose $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_k^* : P \mapsto \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$. $e_k^* \in (\mathbb{K}[X])^*$, et $(e_0^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale de la base $\mathcal{B}$.

Exemple :

$E = \mathbb{K}_n[X]$. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$. Soit $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$ la famille de polynômes de Lagrange associée à $(a_0, \dots, a_n)$. $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P(X) = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i(X)$.

On pose $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_k^* = P(a_k)$. $(e_0^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale de $\mathcal{L}$.

Exemple :

$E = \mathbb{R}^3$. On munit E de la base canonique $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ telle que $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $e_3' = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -1$. $\mathcal{B}'$ est une base de E , on cherche sa base duale $\mathcal{B}'^*$. Soient $P = P_{\mathcal{B}'}$, et $v \in E$.

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$.

Alors $X = P X' \Leftrightarrow X' = P^{-1} X$. $P^{-1} = -1 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{cases} e_1'^*(v) = -2x + z \\ e_2'^*(v) = 3y - 2x \\ e_3'^*(v) = x - 2y + z \end{cases}$.

4. Bases antéduales

Lemme :

Soit $x \in E$ tel que $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi(x) = 0$. Alors $x = 0$.

Preuve :

Si $x \neq 0$, notons $e_1 = x$. On complète (e_1) en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . On introduit la base duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$, mais alors $e_1^*(e_1) = 1 \neq 0$. Contradiction, donc $x = 0$.

Théorème :

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^* . Il existe une unique base de E , $\mathcal{B}=(e_1, \dots, e_n)$, telle que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ soit la base duale de la base $\mathcal{B}$.

Définition :

|| Cette base $\mathcal{B}$ est appelée base antéduale ou préduale de la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Preuve du théorème :

Soit $\phi : x \in E \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in \mathbb{K}^n$. Comme $\dim(E) = \dim(\mathbb{K}^n)$, il suffit de montrer que ϕ est linéaire et injective pour prouver que ϕ est un isomorphisme entre E et $\mathbb{K}^n$. ϕ est linéaire par linéarité de chaque application φ . Soit $x \in \text{Ker}(\phi)$. $\phi(x) = (0, \dots, 0)$, c'est-à-dire $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi_i(x) = 0$. Soit alors $\varphi \in E^*$.

Comme $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* , $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$. Alors $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x) = 0$.

D'après le lemme, $x=0$, ainsi ϕ^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E .

Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Notons $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_j = \phi^{-1}(\varepsilon_j)$. Montrons que $\mathcal{B}=(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , dont la duale est $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Par construction, $\mathcal{B}$ est l'image par ϕ^{-1} d'une base de $\mathbb{K}^n$, or ϕ^{-1} est un isomorphisme. Donc $\mathcal{B}$ est une base de E .

Par définition, $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\phi(e_j) = \varepsilon_j$, et $\phi(e_j) = (\varphi_1(e_j), \dots, \varphi_n(e_j))$, donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$.

Par unicité de la base de E^* vérifiant les formules de Kronecker, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est la base duale de $\mathcal{B}$.

Considérons $\mathcal{B}'$ une autre base de E dont la duale est $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\varphi_i(e_j') = \delta_{i,j}$, c'est-à-dire $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\phi(e_j') = \varepsilon_j$. Donc $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_j' = \phi^{-1}(\varepsilon_j) = e_j$.

Remarque :

Pour obtenir la base antéduale d'une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de E^* , on utilise de formules de Kronecker, c'est-à-dire que $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on cherche $e_j \in E$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$.

Exemple :

$E = \mathbb{K}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$. On pose $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi_i(X) = \frac{P^{(i)}(X)}{i!}$. Alors $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* dont l'antéduale est $(P_0, \dots, P_n)$, où $P_k(X) = (X-a)^k$, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Exemple :

$E = \mathbb{K}_n[X]$. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$.

On pose $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi_i : P \in E \mapsto P(a_i)$. Alors $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* dont l'antéduale est la base de Lagrange associée à $(a_0, \dots, a_n)$.

Exemple :

$E = \mathbb{R}_3[X]$. Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$. On pose $\varphi_1(P) = b+a$, $\varphi_2(P) = c+a$, $\varphi_3(P) = c+b$, formes linéaires de E .

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 = 0$. $\forall i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, $\alpha_1 \varphi_1(X^i) + \alpha_2 \varphi_2(X^i) + \alpha_3 \varphi_3(X^i) = 0$.

Ainsi $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$: on obtient $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, donc $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* .

Recherche de l'antéduale (P_1, P_2, P_3) : On cherche d'abord $P_1(X) = aX^2 + bX + c$ tel que $\varphi_1(P_1) = 1$, $\varphi_2(P_1) = 0$,

$$\text{et } \varphi_3(P_1) = 0. \quad \begin{cases} b+a=1 \\ c+a=0 \\ c+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela revient donc à utiliser la première colonne de A^{-1} pour avoir les coordonnées de P_1 .

$$\text{Or, } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Ainsi } P_1(X) = \frac{1}{2}(X^2 + 1 - 1). \text{ De même, pour } P_2, \text{ on utilise la deuxième colonne de } A^{-1}, \text{ et la troisième pour } P_3 : P_2(X) = \frac{1}{2}(X^2 - X + 1), \text{ et } P_3(X) = \frac{1}{2}(-X^2 + X + 1).$$

* * * * *